К обобщенной проблеме Римана–Гильберта

И. В. Вьюгин
ИППИ РАН
vyugin@gmail.com

Р. Р. Гонцов
ИППИ РАН
rgontsov@inbox.ru

Аннотация

Рассматривается обобщенная проблема Римана–Гильберта для данных монодромии скалярного линейного дифференциального уравнения с иррегулярными особенностями.

1. Обобщенная проблема Римана–Гильберта

Классическая проблема Римана–Гильберта – вопрос о существовании системы

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \qquad y(z) \in \mathbf{C}^p, \tag{1}$$

p линейных дифференциальных уравнений с заданными *фуксовыми* особыми точками $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbf{C}}$ и монодромией

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbf{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(p, \mathbf{C}) \tag{2}$$

– в общем случае имеет отрицательное решение. Напомним, особенность a_i системы (1) называется фуксовой, если матричная дифференциальная 1-форма $B(z)dz$ имеет простые полюсы в этой точке. Монодромия системы – это представление фундаментальной группы проколотой сферы Римана в пространство невырожденных комплексных матриц размера p. При этом петля γ отображается в матрицу G_γ такую, что $Y(z) = \widetilde{Y}(z)G_\gamma$, где $Y(z)$ – фундаментальная матрица системы в окрестности точки z_0 и $\widetilde{Y}(z)$ – ее аналитическое продолжение вдоль γ.

Первый контрпример к проблеме Римана–Гильберта был предъявлен А. А. Болибрухом в случае $p = 3$, $n = 4$ (подробно см. в [1], глава 2). Им же получены различные достаточные условия положительного решения проблемы. Здесь мы остановимся на одном из них, которое послужило основой данной работы.

(**A**) *Если представление* (2) *является монодромией линейного дифференциального уравнения*

$$\frac{d^p u}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)u = 0 \tag{3}$$

порядка p, все особенности $a_1, \ldots, a_n$ которого фуксовы, то проблема Римана–Гильберта имеет положительное решение (см. [2], дополнение 1). Фуксовость особой точки a_i скалярного уравнения (3) означает, что коэффициент $b_j(z)$ имеет в этой точке полюс порядка не более j ($j = 1, \ldots, p$).

Отметим, что фуксовы особенности как системы, так и скалярного уравнения, являются *регулярными* особыми точками, т. е. все решения вблизи них имеют не более чем степенной рост. Поэтому проблема Римана–Гильберта, а также приведенное выше достаточное условие ее разрешимости, могут быть изложены в терминах мероморфной эквивалентности систем линейных дифференциальных уравнений.

Линейное преобразование

$$\tilde{y} = \Gamma(z)y \tag{4}$$

(локальное, в окрестности O_i особой точки a_i, или глобальное) называется *мероморфно обратимым*, если матрица $\Gamma(z)$ мероморфна (в O_i или, соответственно, в $\overline{\mathbf{C}}$) и $\det\Gamma(z) \not\equiv 0$. Такое преобразование переводит систему (1) в систему

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \widetilde{B}(z)\tilde{y}, \qquad \widetilde{B}(z) = \frac{d\Gamma}{dz}\Gamma^{-1} + \Gamma B(z)\Gamma^{-1}, \tag{5}$$

которая называется *мероморфно эквивалентной* исходной системе (1).

Согласно теореме Племеля всегда найдется система (1) с заданными *регулярными* особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и монодромией (2). Поэтому отрицательное решение проблемы Римана–Гильберта означает, что существуют системы с регулярными особыми точками, которые не могут быть (глобально) мероморфно эквивалентны фуксовым системам с теми же особенностями. (Здесь мы используем тот несложный факт, что две линейные системы с одинаковым набором регулярных особых точек (глобально) мероморфно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую монодромию.) В то же время, ввиду достаточного условия (**A**), система специального вида

$$\frac{dy}{dz}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -b_p & \ldots & \ldots & -b_1 \end{pmatrix} y, \qquad (6)$$

полученная из *фуксова* уравнения (3) с помощью стандартной замены

$$y^1=u, \quad y^2=\frac{du}{dz},\ldots, \quad y^p=\frac{d^{p-1}u}{dz^{p-1}} \qquad (7)$$

(следовательно, все особые точки этой системы регулярны), глобально мероморфно эквивалентна фуксовой системе с теми же особенностями.

В данной работе мы рассматриваем *обобщенную* проблему Римана–Гильберта для линейных систем с *иррегулярными* (т. е. не являющимися регулярными) особыми точками и аналог достаточного условия (**A**) для этой проблемы. Прежде чем сформулировать обобщенную проблему Римана–Гильберта (предложенную в [4]), напомним определение *минимального ранга Пуанкаре* системы (1) в ее особой точке.

Если ряд Лорана матрицы $B(z)$ коэффициентов системы (1) имеет вид

$$B(z)=\frac{B_{-r-1}}{(z-a)^{r+1}}+\ldots+\frac{B_{-1}}{z-a}+B_0+\ldots \qquad (B_{-r-1}\neq 0)$$

в окрестности особой точки $a=a_i$, то число r называют *рангом Пуанкаре* системы в этой точке.

Нетрудно заметить, что (локальные) мероморфные преобразования (4) могут как повышать, так и понижать ранг Пуанкаре. *Минимальным* рангом Пуанкаре системы (1) в особой точке a_i называется наименьший из рангов Пуанкаре систем (5), мероморфно эквивалентных системе (1) в окрестности O_i точки a_i.

Например, минимальный ранг Пуанкаре регулярной особой точки равен нулю, а минимальный ранг Пуанкаре иррегулярной особенности положителен.

Обобщенную проблему Римана–Гильберта для систем с иррегулярными особыми точками можно сформулировать следующим образом.

Для каждого $i=1,\ldots,n$ *рассмотрим локальную систему*

$$\frac{dy}{dz}=B_i(z)y, \quad B_i(z)=\frac{B^i_{-r_i-1}}{(z-a_i)^{r_i+1}}+\ldots+\frac{B^i_{-1}}{z-a_i}+\ldots, \quad (8)$$

в окрестности O_i *особой точки* a_i *минимального ранга Пуанкаре* r_i*. Существует ли глобальная система* (1) *с особенностями* $a_1,\ldots,a_n$ *рангов Пуанкаре* $r_1,\ldots,r_n$*, заданной монодромией* (2) *и мероморфно эквивалентная системам* (8) *в соответствующих окрестностях* O_i*?*

Естественно, что для положительного решения данной проблемы необходимо, чтобы монодромии локальных систем (8) совпадали с соответствующими ограничениями $\chi|_{\pi_1(O_i\setminus\{a_i\})}$ представления (2).

Будем называть представление (2) вместе с локальными системами (8) *обобщенными данными монодромии.*

Классическая проблема Римана–Гильберта является частным случаем обобщенной (когда все $r_i=0$; в этом случае системы (8) могут быть опущены, поскольку они однозначно определяются представлением монодромии (2)). В следующем параграфе мы приводим контрпример к последней, когда минимальные ранги Пуанкаре r_i положительны, т. е. особенности систем (8) иррегулярны. Основным результатом работы является следующее обобщение достаточного условия (**A**), доказанное в [5].

Теорема 1. *Система* (6)*, соответствующая уравнению* (3)*, все особенности которого формально не разветвлены, мероморфно эквивалентна системе* (1) *с теми же особыми точками, ранги Пуанкаре которых минимальны.*

Другими словами, обобщенная проблема Римана–Гильберта для обобщенных данных монодромии, соответствующих скалярному уравнению (3), особенности которого формально не разветвлены, имеет положительное решение.

2. Контрпримеры к обобщенной проблеме Римана–Гильберта

Далее мы приводим контрпример к обобщенной проблеме Римана–Гильберта, основанный на следующем предложении (см. [3] – предл. 2.2.4, доказательство теор. 2.3.3, следствие 2.3.2).

Предложение 1. *Для любого набора точек* $a_1,\ldots,a_n\in\overline{\mathbf{C}}$ *и четного числа* γ, $0<\gamma\leq n-2$*, можно построить трехмерное представление*

$$\chi^*:\pi_1(\overline{\mathbf{C}}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\})\longrightarrow \mathrm{GL}(3,\mathbf{C}),$$

обладающее следующими свойствами:

а) существует система (1) *с особенностями* $a_1,\ldots,a_n$ *и монодромией* χ^**, причем особенность* a_1 *регулярная и ее ранг Пуанкаре равен* $\gamma/2$*, а остальные особенности фуксовы;*

б) не существует аналогичной системы с меньшим рангом Пуанкаре в точке a_1*.*

Пример 1. Пусть $a_1,\ldots,a_6\in\overline{\mathbf{C}}$, $\gamma=4$ и χ^* – соответствующее этому числу представление из предложения 1. Обозначим через $G_1,\ldots,G_6\in\mathrm{GL}(3,\mathbf{C})$ образующие данного представления, а через $E_1,\ldots,E_6$ – их нормализованные логарифмы (т. е., $E_k=\frac{1}{2\pi i}\ln G_k$).

Рассмотрим следующие обобщенные данные монодромии:

$(*)$ представление χ^*;

$(**)$ локальные системы $\frac{dy}{dz} = B_k(z)y$ $(k = 1, \ldots, 6)$, где

$$B_1(z) = \frac{E_1}{z-a_1} - \frac{I}{(z-a_1)^2},$$
$$B_k(z) = \frac{E_k}{z-a_k}, \qquad k = 2, \ldots, 6.$$

Покажем, что обобщенная проблема Римана–Гильберта для данных монодромии $(*), (**)$ имеет отрицательное решение.

Допустим, существует (глобальная) система

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{9}$$

с особыми точками $a_1, \ldots, a_6$ рангов Пуанкаре $r_1 = 1$, $r_2 = \ldots = r_6 = 0$ соответственно и монодромией χ^*, мероморфно эквивалентная системе $\frac{dy}{dz} = B_1(z)y$ в окрестности (иррегулярной) особенности a_1. Тогда ее фундаментальная матрица имеет вид

$$Y(z) = \Gamma_1(z)(z-a_1)^{E_1} e^{\frac{1}{z-a_1}},$$

где $\Gamma_1(z)$ – мероморфно обратимая в точке a_1 матрица. Следовательно, система

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \left(B(z) + \frac{I}{(z-a_1)^2}\right)\tilde{y},$$

полученная из (9) с помощью замены $\tilde{y} = e^{-\frac{1}{z-a_1}}y$, имеет те же особенности и монодромию, но точка a_1 является регулярной особенностью ранга Пуанкаре 1 для последней системы. Это противоречит одному из свойств представления χ^* (свойству б) из предложения 1).

Список литературы

[1] *Anosov D.V., Bolibruch A.A.* The Riemann–Hilbert problem. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1994. (Aspects Math.; V. 22).

[2] *Болибрух А.А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: МЦНМО, 2009.

[3] *Болибрух А.А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем. М.: Наука, 1994. (Тр. МИАН; Т. 206).

[4] *Bolibruch A.A., Malek S., Mitschi C.* On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities // Exposition. Math. 2006. V. 24. P. 235–272.

[5] *Вьюгин И.В., Гонцов Р.Р.* О построении системы линейных дифференциальных уравнений по скалярному уравнению // Тр. МИАН. 2010. (в печати, см. www.iitp.ru/upload/publications/4688/irregequ3.pdf)