Проблема Римана–Гильберта в нетривиальных расслоениях над $\mathbb{CP}^{1*}$

И. В. Вьюгин
Институт проблем передачи информации РАН
vyugin@gmail.com

Аннотация

Рассматривается одно обобщение известной проблемы Римана–Гильберта. В классической проблеме требовалось построить фуксову систему, имеющую заданные представление монодромии и набор особых точек. Мы рассматриваем задачу построения логарифмической связности в расслоении заданного голоморфного типа по тем же данным. Заметим, что случай тривиального расслоения совпадает с классической проблемой Римана–Гильберта для фуксовых систем.

1. Введение

Фуксовой системой называется система линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \qquad z \in \mathbb{C}, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

с матрицей коэффициентов $B(z)$, имеющей особые точки — лишь полюса 1-го порядка. Точнее: система (1) называется *фуксовой в точке*, если матрица $B(z)$ имеет полюс первого порядка в этой точке, *фуксовой в области*, если все ее особенности в этой области — фуксовы. Нам будет важен случай, когда система рассматривается на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ $(= \mathbb{CP}^1)$. Систему (1) называют фуксовой на сфере Римана, если особенности дифференциальной формы ее коэффициентов

$$\omega = B(z)dz$$

лишь полюса 1-го порядка. Нетрудно проверить, что система (1) фуксова на сфере Римана и имеет особые точки $a_1, \ldots, a_n$, если

$$B(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i}, \qquad \sum_{i=1}^{n} B_i = 0, \tag{2}$$

причем второе условие означает в точности, что $z = \infty$ — неособая точка системы (1).

Монодромия. Решения системы (1) образуют линейное пространство. Обозначим через $Y(z)$ фундаментальную матрицу системы (1), т.е. матрицу, столбцы которой образуют базис пространства ее решений. Фундаментальная матрица определена на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ с проколами в точках $a_1, \ldots, a_n$. При аналитическом продолжении матрицы $Y(z)$ вдоль петли γ с концом в неособой точке z_0, обходящей какие-то особые точки, ее значение может измениться, то есть матрица $Y(z)$ определена как однозначная функция на универсальном накрытии $\widetilde{\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}}$. Поскольку продолженная фундаментальная матрица $\tilde{Y}(z)$ будет базисом того же пространства решений, то старая матрица с новой связана умножением на постоянную невырожденную матрицу G_γ:

$$Y(z) = \tilde{Y}(z) G_\gamma.$$

Возникает представление $[\gamma] \to G_\gamma$ (где $[\gamma]$ означает гомотопический класс петли γ):

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \to GL(\mathbb{C}, p), \tag{3}$$

ставящее в соответствие петле невырожденную матрицу, называемое **представлением монодромии** системы (1).

Наиболее известным вопросом этой теории являлась проблема Римана–Гильберта (21-я проблема Гильберта) для фуксовых систем:

Для любого ли представления (3) существует фуксова на сфере Римана система (1),(2), имеющая представление монодромии (3) и набор особых точек $a_1, \ldots, a_n$?

Отрицательное решение было получено в 1989 году А. А. Болибрухом. Контрпример приведен в [1].

Расслоение и связность. Еще одним важным объектом станут голоморфные расслоения на сфере Римана с логарифмическими связностями.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00342-а и грантов Президента НШ-8508.2010.1, МК-3178.2009.1.

Голоморфным векторным расслоением F называют следующий набор объектов: $\mathbf{B} = \overline{\mathbb{C}}$ — база, $\mathbf{F} = \mathbb{C}^p$ — слой, $\{U_i\}$ — покрытие базы окрестностями и набор склеивающих функций

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(p, \mathbb{C}),$$

голоморфных и невырожденных в своих областях определения, удовлетворяющих условиям коцикла:

$$g_{ij}(z) = g_{ji}^{-1}(z), \qquad z \in U_i \cap U_j;$$
$$g_{ij}(z) g_{jk}(z) g_{ki}(z) = I, \quad z \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Набор функций $\{g_{ij}\}$ называют склеивающим коциклом. Этот набор объектов в совокупности определяет расслоение, см. [2].

Связностью ∇ в голоморфном векторном расслоении F называют набор матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega_i\}$, определенных каждая в своей окрестности U_i, удовлетоворяющих следующему условию: у каждой системы

$$dy = \omega_i y \tag{4}$$

можно фиксировать фундаментальную матрицу $Y_i(z)$ так, что для всех i, j, $z \in U_i \cap U_j$:

$$g_{ij}(z) = Y_i(z) Y_j^{-1}(z).$$

Такой набор форм называют связностью. *Логарифмической* называют связность, которая определяется фуксовыми в своих окрестностях системами (4).

Голоморфная классификация расслоений на сфере Римана задается следующей теоремой.

Теорема 1. *(Биркгоф, Гротендик) Голоморфное расслоение над $\overline{\mathbb{C}}$ голоморфно эквивалентно одному из расслоений семейства:*

$$\left(U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^K, \omega_0, \omega_\infty\right),$$
$$K = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_p), \quad k_i \in \mathbb{Z}, \quad k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p.$$

K называют типом расщепления расслоения.

Основным предметом изучения этой работы является следующий вопрос, предложенный Ю.С. Ильяшенко.

Можно ли по заданному представлению (3), набору особых точек $a_1, \ldots, a_n$ и набору целых чисел $K = (k_1, \ldots, k_p)$ построить логарифмическую связность, имеющую данное представление монодромии (3) и набор особенностей $a_1, \ldots, a_n$, в расслоении с типом расщепления K?

В качестве мотивации этой задачи можно привести те обстоятельства, что частные случаи этой задачи эквивалентны известным задачам. Так случай тривиального расслоения $K = 0$ эквивалентен, сформулированный выше классической проблеме Римана–Гильберта. Другой случай (см. теорему) эквивалентен проблеме Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений. Этот вопрос является достаточно содержательным обобщение классической проблемы Римана–Гильберта.

2. Формула для размерности

Рассмотрим расслоение с логарифмической связностью, оно может быть задано координатным описанием

$$(F, \nabla) = \left(U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, g_{0\infty} = z^K, \omega_0, \omega_\infty\right).$$

Обозначим за Ω_K множество всех не эквивалентных пар (F, ∇) с типом расщепления K и набором особенностей $a_1, \ldots, a_n$. Нас будет интересовать размерность, т.е. число непрерывных параметров, от которых зависит множество Ω_K. Пусть $K = \mathrm{diag}(I_{l_1} d_1, \ldots, I_{l_m} d_m)$, где $d_1 > d_2 > \ldots > d_m$, а I_{l_s} – единичная матрица размерности l_s.

Теорема 2. *Размерность множества Ω_K равна*

$$\dim \Omega_K = (n-1)p^2 - \sum_{i<j} l_i l_j (w_{ij} + 1) - \sum_i l_i^2 + 1, \tag{5}$$

где $w_{ij} = \min(d_i - d_j, n-1)$.

План доказательства. Пусть $a_1 = 0$, а $z = \infty$ — неособая точка. Рассмотрим форму ω_∞, эта форма фуксова вне нуля, но имеет вид $\omega_\infty = z^{-K} \omega_0 z^K - \frac{K}{z}$, где форма ω_0 фуксова в $\mathbb{C}$. Это означает, что форма ω_∞ может быть записана рядом Лорана и элемент $u_{ij}(z)$ формы ω_∞ имеет порядок роста (порядок нуля/полюса) равный $\mathrm{ord}_{z=0} u_{ij}(z) \geq k_j - k_i - 1$.

Заметим, что в случае, когда $\mathrm{ord}_{z=0} u_{ij} \geq n-1$ элемент $u_{ij}(z)$ должен быть тождественно равен нулю. Действительно, форма ω — мероморфная форма на $\overline{\mathbb{C}}$, а следовательно, $\sum_{i=1}^n \mathrm{ord}_{z=a_i} u_{ij}(z) dz = -2$, но $u_{ij}(z)$ имеет не более чем простые полюса в особых точках $a_2, \ldots, a_n$, а значит, порядок нуля функции $u_{ij}(z)$ не может превышать $n-2$ или $u_{ij}(z)$ должно быть тождественным нулем.

Таким образом мы можем вычислить число параметров от которых зависит форма ω. Это следующая величина

$$(n-1)p^2 + \sum_{i<j} l_i l_j (d_i - d_j - w_{ij}).$$

Вторым этапом необходимо вычислить число параметров от которых зависят симметрии формы сохраняющие связность. Эти формы — это калибровочные преобразования. Можно показать, что размерность их множества равна

$$\sum_{i \leq j} l_i l_j (d_i - d_j + 1).$$

Разность этих двух величин плюс один (так как постоянное скалярное калибровочное преобразования не изменяет форму коэффициентов) и будет ответом. □

3. Связность в расслоении и скалярные фуксовы уравнения

Теорема 3. *1. (А.А. Болибрух [1],[4]) По неприводимому представлению χ вида (3) и набору особенностей $a_1,\ldots,a_n$ можно построить скалярное фуксово уравнение тогда и только тогда, когда по нему можно построить расслоение типа расщепления*

$$K = ((n-2)(p-1),\ldots,n-2,0),$$

с логарифмической связностью, имеющей монодромию χ и те же особые точки.

2. (И.В. Вьюгин [6]) По любому представлению χ вида (3) и набору особенностей $a_1,\ldots,a_n$ можно построить скалярное фуксово уравнение тогда и только тогда, когда по нему можно построить стабильную пару (определение см. в [2]) с типом расщепления

$$K = ((n-2)(p-1),\ldots,n-2,0),$$

с логарифмической связностью, имеющей монодромию χ и те же особые точки.

Эта теорема означает, что проблема Римана–Гильберта для скалярных фуксовых уравнений вкладывается в задачу построения логарифмической связности в расслоении заданного голоморфного типа.

4. Связь с классической проблемой Римана-Гилберта

В этом параграфе изучается важный случай задачи построения связности в расслоении с типом расщепления вариации один, т.е. когда $k_1 - k_p = 1$. Решение данной задачи в этом случае наряду со случаем тривиальных расслоений имеет полную размерность (см. формулу (5)), это отличает его от всех остальных случаев.

Обозначим через K_l матрицу $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$, с l единицами и $p-l$ нулями.

Замечание 1. *Если для представления χ проблема Римана-Гильберта имеет положительное решение, то по нему можно построить расслоение с типом расщепления K_l для любого l.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует тривиальное расслоение F с логарифмической связностью ∇, с особыми точками $a_1,\ldots,a_n$ и монодромией χ. Для удобства предположим, что $a_1 = 0$, этого всегда можно добиться подходящей дробно-линейной заменой переменной. Рассмотрим левелевскую фундаментальную матрицу (базис горизонтальных сечений) связности вблизи особой точки $z = a_1$

$$Y_1 = U_1(z) z^{\Lambda_1} z^{E_1},$$

дополнительно, будем рассматривать такое координатное описание расслоения, что $U_1(z) = I + U_1^1 z + U_1^2 z^2 + \ldots$. Заметим, что

$$Y_1(z) = z^{-K_l} \tilde{U}_1(z) z^{\Lambda_1 + K_l} z^{E_1},$$

где $\tilde{U}_1(z) = z^{K_l} U_1(z) z^{-K_l}$. Имея в виду разложение для $U_1(z)$ получим, что

$$\tilde{U}_1(z) = z^{K_l}(I + U_1^1 z + o(z)) z^{-K_l} = I + z^{K_l}(U_1^1 + o(1)) z^{I-K_l},$$

т.е. $\tilde{U}_1(z)$ является голоморфно обратимой матрицей. Мы получили, что матрица $\tilde{Y}_1(z) = z^{K_l} Y_1(z)$ – фуксова в нуле, а матрица $Y_1(z)$ – фуксова везде вне нуля, это означает, что они определяют расслоение со связностью.

$$(F,\nabla) = \Big(U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\},$$

$$\omega_0 = \frac{d\tilde{Y}_1(z)}{dz} \tilde{Y}_1^{-1}(z), \omega_\infty = \frac{dY_1(z)}{dz} Y_1^{-1}(z), g_{0\infty} = z^{K_l}\Big).$$

То есть мы построили искомое расслоение. □

Следствие 1. *Если проблема Римана-Гильберта для представления χ и набора особых точек $a_1,\ldots,a_n$ разрешима в расслоениях типа K_l, то она разрешима в них при почти любом наборе особенностей (кроме, быть может, аналитического подмножества корамерности 1).*

Доказательство. Это прямо следует из предыдущего замечания и теоремы Б. Мальгранжа о дивизоре. □

5. Контрпримеры

В этом параграфе мы докажем, что существуют контрпримеры к проблеме Римана–Гильберта в нетривиальных расслоениях.

Предложение 1. *Для любого натурального d существует трехмерное представление (3) которое нельзя реализовать как представление монодромии логарифмической связность ни в одном расслоении с типом расщепления $K = (k_1, k_2, k_3)$ при $k_1 - k_3 < d$. Утверждение верно для любого количества особых точек $n \geqslant 2d + 2$.*

Доказательство. Доказательство будет основано на утверждениях из [1] (см. предл. 2.2.4, доказательство теор. 2.3.3, следствие 2.3.2). Согласно предложению 1 из [?]:

Предложение 2. *Для любого набора точек $a_1,\dots,a_n \in \overline{\mathbb{C}}$ и числа d, $0 < 2d \leqslant n-2$, можно построить трехмерное представление*

$$\chi^* : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1,\dots,a_n\}) \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}).$$

обладающее следующими свойствами:

а) существует система (1) с особенностями $a_1,\dots,a_n$ и монодромией χ^*, причем особенность a_1 регулярная и ее ранг Пуанкаре равен d, а остальные особенности фуксовы;

б) не существует аналогичной системы с меньшим рангом Пуанкаре.

Для доказательства предложения 1 мы воспользуемся пунктом б) предыдущего предложения. Действительно пусть по представлению χ^* можно построить расслоение с логарифмической связностью и типом расщепления K. Тогда рассмотрим форму связности ω_∞ в окрестности $\overline{\mathbb{C}} \setminus a_1$. Система

$$dy = \omega_\infty y,$$

фуксова вне точки a_1, а в этой точке калибровочным преобразованием $\tilde{y} = (z-a_1)^K y$ переводится в систему

$$dy = \omega_0 y,$$

фуксову в точке $z = a_1$. Легко видеть, что форма ω_∞, полученная из ω_0 по формуле

$$\omega_\infty = (z-a_1)^K \omega_0 (z-a_1)^{-K} + \frac{K}{z-a_1} dz$$

имеет ранг Пуанкаре в точке a_1 не выше, чем $k_1 - k_3$, но в случае, если $k_1 - k_3 \geqslant d$ это противоречит предположению. □

В заключение хочу сказать, что результаты работы были получены автором при обсуждении этих вопросов с Юлием Сергеевичем Ильяшенко и Юлией Бибило которым автор выражает искреннюю благодарность.

Список литературы

[1] Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 206.*

[2] Болибрух А. А. Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений *М.: МЦНМО, 2009.*

[3] Болибрух А.А. Проблема Римана–Гильберта на компактной римановой поверхности // *Тр. МИРАН. 2002. Т. 238. С. 55-69.*

[4] Singer M., Van Der Put M. Galois Theory of Linear Differential Equations // *Springer. 2003.*

[5] Гонцов Р.Р., Побережный В.А. Различные варианты проблемы Римана–Гильберта для линейных дифференциальных уравнений // *УМН. 2008. Т. 63. В. 4. С. 147-184.*

[6] Вьюгин И.В. О 21-й проблеме Гильберта для скалярных фуксовых уравнений // ДАН. 2009. Т. 425. N 3. С. 305-308.